



ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES, ISAE-SUPAERO,
ENSTA PARIS, TELECOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ETIENNE, MINES NANCY, IMT ATLANTIQUE,
ENSAE PARIS, CHIMIE PARISTECH – PSL,
ECOLE POLYTECHNIQUE, ARTS et METIERS,
ESPCI PARIS, SUOPTIQUE, ESTP.

Admission par voie universitaire

EPREUVE de MATHÉMATIQUES et de PHYSIQUE

Durée de l'épreuve : 2 heures.

L'emploi de tout document (dictionnaires, imprimés, ...) ou de tout appareil (traductrices, calculatrices électroniques, ...) est interdit dans cette épreuve.

Cette épreuve est un questionnaire à choix multiples.

Les questions sont numérotées de 1 à 20 pour l'épreuve de mathématiques et de 21 à 40 pour l'épreuve de physique.

Chaque question peut admettre, de façon variable, entre une et cinq réponses correctes.

Dans toutes les questions vous indiquerez les assertions correctes.
Exprimer les réponses exactes en noircissant la ou les cases correspondantes.

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

L'énoncé de cette épreuve comporte 17 pages de texte.



QCM de Mathématiques

Questions 1 à 20

1. Soient f la fonction donnée par $f(x) = \frac{1}{2}x + x^2$ et (u_n) la suite définie par récurrence :

$$u_0 \in \mathbb{R} \text{ et}$$

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

- A. Pour tout $u_0 \in [-1, \frac{1}{2}]$ la suite converge.)
- B. Pour tout $u_0 \in [-1, \frac{1}{2}]$ la suite est monotone.)
- C. Pour tout $u_0 \in \mathbb{R}$ la suite est minorée.)
- D. Pour tout $u_0 > 0$ la suite est monotone.
- E. Si la suite converge alors sa limite est 0.

2. Soient $c, d > 0$ et $a, b \in \mathbb{R}$. On considère la fonction f donnée par $f(x) = \frac{ax+b}{\sqrt{cx^2+d}}$.

- A. La fonction admet un extremum.
- B. La fonction f est convexe. |
- C. La fonction est dérivable partout.
- D. $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = \frac{a}{c}$. †
- E. La fonction admet exactement un point fixe.

3. Toutes les fonctions f considérées dans cet exercice sont définies sur \mathbb{R} . Une telle fonction f est dite strictement convexe si pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et tout $0 < \lambda < 1$, $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$. On rappelle que x est dit point fixe de f si $f(x) = x$.

- A. Si f est strictement convexe alors f a au plus 2 points fixes.
- B. Une fonction f convexe peut avoir 0 points fixes.)
- C. La composition de deux fonctions convexes est convexe.)
- D. La somme de deux fonctions convexes est convexe.)
- E. Toute fonction convexe f est minorée.

4. Soit (u_n) la suite donné par

$$u_0, u_1 \in \mathbb{R} \text{ et}$$

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n \text{ pour } n \geq 2$$

- A. Pour toute valeur de u_0, u_1 la suite (u_n) converge. †
- B. Pour $u_0 = u_1 = 1$, $u_n = \frac{1}{2}(3^n + (-1)^n)$.)
- C. Pour $u_0 = 1$ et $u_1 = -9$, $u_n = -2 \cdot 3^n + 3(-1)^n$.)
- D. Si $u_0 u_1 > 0$ la suite est monotone.
- E. La suite est périodique de période 2 si et seulement si $u_0 = u_1 = 1$.

5. Pour chacune des affirmations suivantes indiquer si elle est vraie ou fausse.

A. Soit X une variable aléatoire réelle admettant une espérance. Alors

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq k)$$

B. Une variable aléatoire bornée admet une variance.

C. Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2, et $a \in \mathbb{R}_+$. Alors,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| > a) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{a}.$$

D. Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si $\mathbb{E}[XY] = 0$.

E. Soit X une variable aléatoire admettant une espérance. Alors $\mathbb{P}(X \geq 1) \leq \mathbb{E}[X]$.

6. Pour chacune des affirmations suivantes indiquer si elle est vraie ou fausse.

A. Soit A un événement de probabilité non nulle, et B un événement tel que $\mathbb{P}(B|A) = 1$. Alors, $B \subset A$.

B. Soit A_1, \dots, A_n événements. Alors $\mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = 0 \Leftrightarrow \max_{1 \leq i \leq n} \mathbb{P}(A_i) = 0$.

C. Pour tous événements A, B on a $|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \leq \frac{1}{4}$.

D. Soit A un événement de probabilité non nulle. Alors pour tout événement B , on a $\mathbb{P}(B|A) \leq \mathbb{P}(B)$.

E. Soient A_1, \dots, A_n événements. Alors, $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) \leq \min_{1 \leq i \leq n} \mathbb{P}(A_i)$.

7. Dans une urne il y a 7 boules blanches et 3 boules noires. Un joueur tire les 10 boules les unes après les autres. Si la k ème boule tirée est blanche il gagne k euros, si elle est noire il perd $2k$ euros. Pour $k = 1, \dots, 10$ on note X_k la somme qu'il a obtenue au k ème tirage (négative en cas de perte).

A. X_1, \dots, X_{10} sont des variables aléatoires indépendantes.

B. Les variables X_1 et $\frac{1}{10}X_{10}$ sont indépendantes et identiquement distribuées.

C. Pour $k = 1, \dots, 10$, la probabilité que la k ème boule tirée soit blanche est $\frac{7}{10}$.

D. Pour $k = 1, \dots, 10$, la probabilité que la k ème boule tirée soit blanche est $1 - \left(\frac{3}{10}\right)^{k-1}$.

E. L'espérance de gain à la fin du jeu est de +5,5 euros.

8. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de \mathbb{R}^3 , et f l'application linéaire dont la matrice dans la base \mathcal{B} est

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -8 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

- A. f est injective.
 B. M est diagonalisable.
 C. Le vecteur $(3, 7, 9)$ est un vecteur propre de M .
 D. 1 est une valeur propre de M .
 E. f laisse le plan engendré par les vecteurs e_1 et e_3 invariant.
9. On considère le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 muni de sa structure euclidienne canonique défini par $F = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 ; x + y + z + t = x - y + z - t = 0$.

A. F est un hyperplan.

B. La matrice de projection orthogonale sur F est $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

C. La distance de $\vec{v} = (1, 2, 3, 4)$ à F est $d(\vec{v}, F) = 5$.

D. La matrice de symétrie orthogonale par rapport à F est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

E. $\mathcal{B} = ((1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, -1))$ est une base de F^\perp .

10. On considère les suites (a_n) et (b_n) données par $a_n = \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ et $b_n = \left(\frac{1}{1 + \sin\left(\frac{1}{n}\right)}\right)$.

Soient $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ et $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$.

- A. Les suites (a_n) et (b_n) sont équivalentes.
 B. Les séries entières f et g ont le même rayon de convergence.
 C. Le rayon de convergence de f est 1.
 D. Le rayon de convergence de g est supérieur à 1.
 E. $f' = g$ dans le disque de convergence de f .
11. Pour $a, z \in \mathbb{C}$ avec $|a| < 1$ on définit $\psi_a(z) = \frac{a-z}{1-\bar{a}z}$. On note $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} ; |z| < 1\}$ le disque unité complexe.
- A. La fonction ψ_a vérifie $|\psi_a(z)| \leq |z|$.
 B. La fonction ψ_a envoie le disque unité dans lui-même.

- C. La fonction ψ_a restreinte sur le disque unité \mathbb{D} est injective.
- D. Pour $a \neq 0$, la fonction $\psi_{1/a}$ est l'inverse de ψ_a dans un voisinage de 0.
- E. La fonction ψ_{-a} est l'inverse de $\psi_{\bar{a}}$ dans un voisinage de 0.
12. On considère la fonction f donnée par $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{\frac{n}{3}}$.
- A. La fonction f est analytique (série entière).
- B. La fonction f est de classe C^∞ sur \mathbb{R}_+^* .
- C. La fonction f est bien définie sur \mathbb{R} .
- D. La fonction G donnée par $G(x) = xf(\frac{3}{4}x)$ est une primitive de f .
- E. Lorsque f est dérivable, $f'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} x^{\frac{n-1}{3}}$.
13. Soient $(\Omega, \mathcal{I}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements mutuellement indépendants.
- A. $\mathbb{P}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = 1 \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$ diverge.
- B. $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$.
- C. $\sum_{n \in \mathbb{N}} \ln(\mathbb{P}(A_n))$ diverge $\Rightarrow \mathbb{P}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = 1$.
- D. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{P}(A_n) < \varepsilon$.
- E. $\mathbb{P}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = 1 - \lim \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\overline{A_n})$
14. On répète successivement et indépendamment une expérience qui a la même probabilité de réussir que d'échouer. Pour $n \geq 2$, on introduit les événements :
- $A_n =$ "On obtient deux succès consécutifs lors des n premières expériences "
- $B_n =$ "On obtient le premier couple de succès consécutifs aux rangs $n - 1$ et n ".
- A. Les événements (A_n) sont indépendants.
- B. Les événements (B_n) sont indépendants.
- C. Pour $n \geq 2$, $\mathbb{P}(A_n) = \sum_{k=2}^n \mathbb{P}(B_k)$.
- D. Pour $n \geq 2$, $\mathbb{P}(B_{n+3}) = \frac{1}{8} \mathbb{P}(\overline{A_n})$.
- E. Pour $n \geq 2$, $\mathbb{P}(B_n) > \frac{1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{3}{4}\right)^n$.
15. Soit σ une permutation de \mathbb{N} c'est à dire une bijection de \mathbb{N} sur lui même. Alors
- A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma(n^2)}$ converge.
- B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma(n)^2}$ converge.

- C. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sigma(n)^2}$ converge.
- D. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma(n)}$ converge.
- E. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{n^2}$ converge.
16. Soit α un réel irrationnel. On notera R_α le rayon de la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{\sin(n\pi\alpha)}$ et S_α celui de la série entière $\sum_{n \geq 1} \sin(n\pi\alpha)x^n$.
 [On rappelle que la suite $(\sin(n\pi\alpha))_n$ est dense dans $] - 1, 1[$ pour α irrationnel.]
- A. Pour tout α , $R_\alpha > 1$.
- B. $S_\alpha = \frac{1}{R_\alpha}$.
- C. $S_\alpha \geq 1$.
- D. Il existe α tel que $R_\alpha > 1$.
- E. Il n'existe pas α tel que $S_\alpha > 1$.
17. Pour $\alpha > 0$, on définit par récurrence la suite $(u_n) : u_0 = \alpha, u_{n+1} = u_n^{u_n}$.
- A. Pour tout $\alpha > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$.
- B. Pour $\alpha > 2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 2^n$.
- C. La suite $(u_n^{-\frac{1}{n}})$ converge vers 0.
- D. Pour $\alpha > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n}$ converge.
- E. Pour $0 < \alpha \leq 1$ la suite u_n est croissante et bornée.
18. Soit T une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} telle que $\mathbb{P}(T > n) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On notera $\rho_n = \mathbb{P}(T = n | T \geq n)$.
- A. Si la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \rho_n$ diverge alors la variance de T est $+\infty$.
- B. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\rho_n \in [0, 1[$.
- C. Pour toute variable aléatoire T vérifiant les hypothèses, $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n$ diverge.
- D. Si T est géométrique de paramètre $q < \frac{1}{2}$ alors $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n$ converge.
- E. $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = 0$.

19. Soit $P : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction polynômiale.

- A. Si $\text{signe}(P' \cdot P'')$ est constant sur $[a, b]$ alors P n'a pas de racine sur $[a, b]$.
- B. Si $\text{signe}(P' \cdot P')(a) = \text{signe}(P' \cdot P')(b)$ alors P ne peut avoir une unique racine dans $[a, b]$.
- C. Si $\text{signe}(P' \cdot P')(a) \neq \text{signe}(P' \cdot P')(b)$ alors l'un des P et P' a au moins une racine dans $]a, b[$.
- D. Si P est de degré impair alors P a au moins une racine dans $[a, b]$.
- E. Pour tous $a < a_1 < \dots < a_n < b$ il existe un polynôme P_n de degré $\geq \deg P + n$ tel que P divise P_n et les racines de P_n soient exactement a_1, \dots, a_n .

20. Soit $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction T périodique et $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On considère l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}) \quad y' + \alpha y = \varphi.$$

- A. L'équation différentielle (\mathcal{E}) a des solutions si et seulement si φ est périodique.
- B. Si φ est T -périodique, toute solution de (\mathcal{E}) est T -périodique.
- C. Si φ est T -périodique et y est une solution de (\mathcal{E}) alors $y(0) = y(T)$ si et seulement si y est T -périodique.
- D. Si φ est T -périodique alors toute solution de (\mathcal{E}) est définie sur \mathbb{R} .
- E. Si $\varphi = e^{-\alpha}$ alors toute solution de (\mathcal{E}) est bornée.

FIN de l'ÉPREUVE de MATHÉMATIQUES



QCM - Physique

Questions 21 à 40

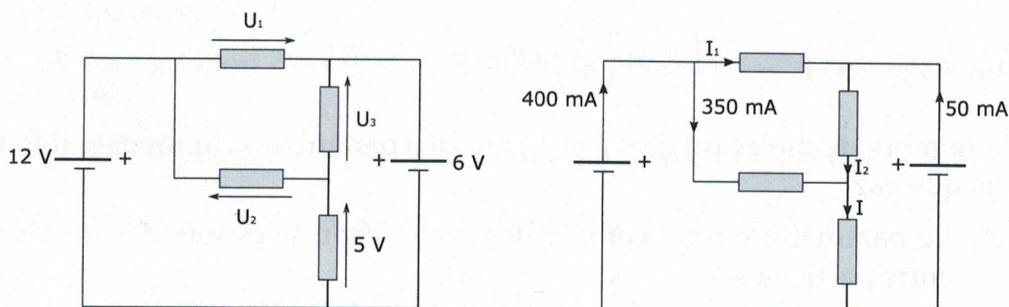
21. Dans le cadre de l'analyse dimensionnelle, la dimension d'une grandeur X quelconque peut s'exprimer en fonction des sept grandeurs fondamentales (la longueur L , la masse M , le temps T , l'intensité électrique I , la température Θ , la quantité de matière N et l'intensité lumineuse J) par la relation suivante :

$$[X] = L^\alpha M^\beta T^\gamma I^\delta \Theta^\epsilon N^\zeta J^\eta$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta$ sont les exposants respectifs des grandeurs fondamentales. Quelles dimensions proposées ci-dessous sont vraies ?

- A. Travail d'une force : $[W] = L^2MT^{-2}$.
- B. Constante des gaz parfaits : $[R] = L^2MT^{-2}N^{-1}\Theta^{-1}$.
- C. Tension électrique : $[U] = L^2MT^{-3}I^{-1}$.
- D. Pression : $[P] = L^{-1}MT^{-3}$.
- E. Constante de Planck $[h] = L^2MT^{-1}$.

22. On s'intéresse aux deux circuits électriques ci-dessous :



- A. Nous avons $U_1 = 6\text{ V}$, $U_2 = -17\text{ V}$ et $U_3 = -11\text{ V}$.
- B. Nous avons $U_1 = -7\text{ V}$, $U_2 = 6\text{ V}$ et $U_3 = 1\text{ V}$.
- C. Nous avons $I = 450\text{ mA}$.
- D. Nous avons $I = 50\text{ mA}$.
- E. Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

23. La loi de Fourier est une loi phénoménologique donnant le flux de chaleur surfacique transféré par conduction dans un matériau, son expression est $\vec{j}_Q = -\kappa \text{grad}T$, où κ est la conductivité thermique caractéristique du matériau. Cette loi permet d'établir l'équation de la chaleur donnant l'évolution temporelle de la distribution de température dans un système : $\frac{\partial T(t, \vec{r})}{\partial t} = \alpha \Delta T(t, \vec{r})$, où α est appelé le coefficient de diffusivité thermique.

- A. L'unité de la conductivité thermique κ est le $J.m^{-1}.K^{-1}$.
- B. Le coefficient de conductivité thermique κ peut être positif ou négatif.
- C. L'unité du coefficient de diffusivité thermique α est le m^2/s .
- D. La loi de Fourier permet de décrire les transferts thermiques dans le vide, il suffit de connaître la valeur de sa conductivité thermique.
- E. En régime stationnaire, la distribution de température dans une barre unidimensionnelle, calorifugée, de longueur e , dont les températures aux extrémités sont fixées à $T(t, 0) = T_1$ et $T(t, e) = T_2$ est donnée par :

$$T(t, x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{e}x.$$

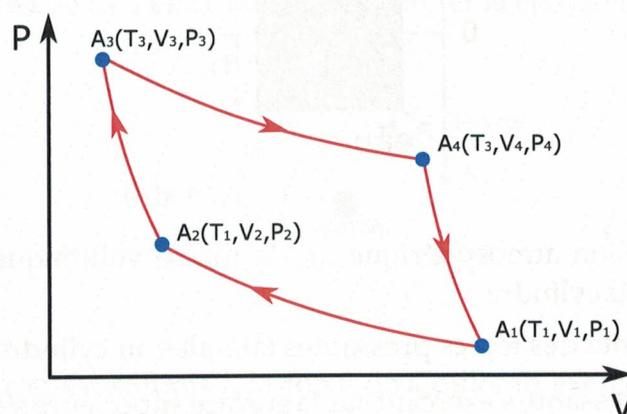
24. En thermodynamique, la prise en compte des interactions entre particules dans la description d'un gaz peut se décrire avec le modèle du gaz réel de Van der Waals dont l'équation d'état est donnée par l'expression suivante :

$$\left(P + \frac{n^2 a}{V^2} \right) (V - nb) = nRT$$

n est le nombre de moles du gaz, a et b sont des paramètres du modèle différents pour chaque gaz.

- A. Le paramètre b rend compte des forces répulsives lors des interactions entre particules.
- B. Le paramètre a rend compte des forces attractives lors des interactions entre particules.
- C. Pour une température et un volume identiques, la pression d'un gaz réel est supérieure à celle d'un gaz parfait.
- D. A cause des interactions entre particules, l'énergie interne d'un gaz réel est plus élevée que celle d'un gaz parfait dans les mêmes conditions de pression et de température.
- E. Le terme $\frac{n^2 a}{V^2}$ peut s'exprimer en J/m^3 .

25. On fait parcourir de façon quasi-statique et réversible le cycle A_1, A_2, A_3, A_4 décrit par le diagramme de Clapeyron ci-dessous à une quantité $n = 1$ mole de gaz parfait. On rappelle que la constante des gaz parfaits est notée R et la capacité calorifique à volume constant C_v .



Ce cycle est constitué des étapes suivantes :

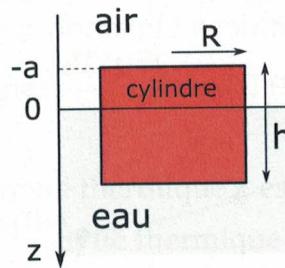
- $A_1 \rightarrow A_2$: compression isotherme à la température T_1
- $A_2 \rightarrow A_3$: compression adiabatique
- $A_3 \rightarrow A_4$: détente isotherme à la température T_3
- $A_4 \rightarrow A_1$: détente adiabatique

- A. Il s'agit du cycle de Beau de Rochas utilisé dans les moteurs à explosion à essence.
- B. La variation d'énergie interne sur la phase $A_1 \rightarrow A_2$ est égale au travail W_{12} .
- C. Sur la phase $A_2 \rightarrow A_3$, la chaleur échangée est $Q_{23} = C_v(T_3 - T_1)$.
- D. Sur la phase $A_3 \rightarrow A_4$, nous avons $W_{34} = RT_3 \ln \frac{V_3}{V_4}$.
- E. Le rendement de ce cycle est $\eta = 1 - \frac{T_1}{T_3}$.

26. Toutes les propositions ci-dessous sont liées au second principe de la thermodynamique, lesquelles sont vraies ?

- A. L'unité de l'entropie est le $J.K$.
- B. L'entropie est une grandeur extensive.
- C. Au cours d'une transformation irréversible, l'entropie de création d'un système est positive.
- D. L'entropie d'un système isolé est toujours nulle.
- E. La variation d'entropie d'un système au cours d'une transformation quelconque est toujours positive ou nulle.

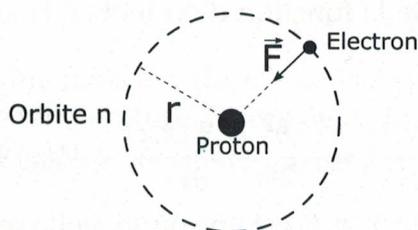
27. On considère un corps cylindrique de hauteur h , de rayon R partiellement immergé dans de l'eau comme représenté sur la figure ci-dessous :



On note P_0 la pression atmosphérique, ρ_e la masse volumique de l'eau et ρ_c la masse volumique du cylindre.

- A. La résultante des forces pressantes latérales au cylindre est nulle.
- B. La force pressante s'exerçant sur la surface supérieure s'écrit $\vec{F}_a = \pi R^2 P_0 \vec{e}_z$.
- C. La pression de l'eau au niveau de la surface inférieure s'écrit $P(h - a) = \rho_e g (h - a)$.
- D. La masse d'eau déplacée par le cylindre est $m_e = \rho_e \pi R^2 (h - a)$.
- E. En situation d'équilibre, nous avons la relation $\frac{a}{h} = 1 - \frac{\rho_c}{\rho_e}$.
28. L'effet photoélectrique correspond à l'émission d'un électron d'un matériau sous l'action de la lumière. Dans notre cas, le matériau considéré est du Zinc et l'énergie nécessaire à l'extraction d'un électron est $W = 3.3 \text{ eV}$. Parmi les propositions ci-dessous, lesquelles sont vraies ?
- A. Dans le cas du Zinc, il n'est pas possible d'observer l'effet photoélectrique avec une lumière dont la longueur d'onde se situe dans le spectre infra-rouge.
- B. La longueur d'onde minimale pour laquelle le phénomène est observé est $\lambda \approx 376 \text{ nm}$.
- C. La fréquence minimale de l'onde lumineuse pour laquelle le phénomène est observé est $\nu \approx 8 \times 10^{14} \text{ Hz}$.
- D. L'observation de l'effet photoélectrique dépend de la puissance lumineuse incidente.
- E. Pour une longueur d'onde incidente $\lambda = 250 \text{ nm}$, la vitesse de l'électron émis est d'environ $v \approx 7.6 \times 10^5 \text{ m/s}$.

29. Dans le cadre du modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène, l'électron est soumis à la force centrale électrostatique \vec{F} du proton et parcourt des orbites circulaires discrètes de rayons r_n définies par la quantification de la norme du moment cinétique orbital de l'électron ($|\vec{L}| = n\hbar = nh/2\pi$, n étant un entier non nul et h la constante de Planck). La masse de l'électron est notée m_e et la charge électrique élémentaire est notée e .



- A. L'électron est soumis à la force de Coulomb exercée par le proton dont l'expression est $\vec{F} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$.
- B. La vitesse de l'électron sur son orbite n est donnée par l'expression : $v = \frac{nh}{2\pi m_e r_n}$.
- C. La vitesse de l'électron sur son orbite n est donnée par l'expression : $v = \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 m_e r_n}}$.
- D. Le rayon r_1 de l'orbite fondamentale de l'électron est donné par l'expression : $r_1 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2}$.
- E. L'énergie mécanique de l'électron sur son orbite n est de la forme $E_n = \frac{E_0}{n^2}$, E_0 étant une constante.
30. On considère une distribution volumique de charges uniforme ρ contenue entre deux sphères concentriques de rayons R_1 et R_2 avec $R_1 < R_2$. Le problème étant à symétrie sphérique, nous avons ainsi :

- $\rho(r) = 0$ pour $r < R_1$ et $r > R_2$
- $\rho(r) = \rho$ pour $R_1 \leq r \leq R_2$

On considérera que le potentiel électrique est nul à l'infini.

- A. La charge totale est donnée par $Q_{tot} = \frac{4}{3}\pi\rho(R_2^3 - R_1^3)$.
- B. Pour $r < R_1$, le champ électrique est donné par $E(r) = \frac{\rho R_1}{3\epsilon_0}$.
- C. Pour $R_1 \leq r \leq R_2$, le champ électrique est donné par $E(r) = \frac{\rho}{3\epsilon_0 r^2} (r^3 - R_1^3)$.

D. Pour $r > R_2$, le potentiel électrique est donné par $V(r) = \frac{Q_{tot}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$.

E. Pour $r < R_1$, le potentiel électrique est nul.

31. Dans sa forme la plus générale, l'équation de Schrödinger unidimensionnelle régissant le comportement de la fonction d'onde $\Psi(x, t)$ associée à une particule de masse m s'écrit

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x)\Psi(x, t)$$

- A. La fonction d'onde $\Psi(x, t)$ est une onde réelle se propageant dans l'espace (unidimensionnel dans ce cas).
- B. $\Psi(x, t)$ correspond à la probabilité de présence de trouver la particule à la position x à un instant t .
- C. $\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x, t)^2 dx = 1$.
- D. L'unité de $\Psi(x, t)$ est le $m^{-1/2}$.
- E. Si $\Psi_1(x, t)$ et $\Psi_2(x, t)$ sont solutions de l'équation de Schrödinger, alors $\Psi(x, t) = \Psi_1(x, t) + \Psi_2(x, t)$ est également solution.

32. La relation d'indétermination d'Heisenberg spatiale mettant en jeu la mesure de la position x d'une particule ainsi que celle de sa quantité de mouvement p_x s'écrit :

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

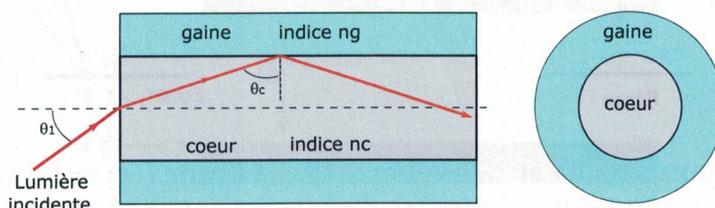
- A. Connaissant exactement la position x d'une particule, il est impossible de mesurer simultanément sa quantité de mouvement p_y avec une précision infinie.
- B. Une conséquence de cette relation est qu'une particule confinée dans un puits de potentiel possède une énergie minimale non-nulle.
- C. L'indétermination liée aux mesures de position et de quantité de mouvement est due à une imprécision des instruments de mesure.
- D. Connaissant la constante de Planck $h = 6.626 \times 10^{-34}$ J.s et la masse de l'électron $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg. L'indétermination sur la vitesse d'un électron confiné dans un atome ($\Delta x = 1 \text{ \AA}$) est $\Delta v_x \geq 5.8 \times 10^5$ m/s.
- E. Les grandeurs Δx et Δp_x sont des dispersions statistiques dues à la nature même de la fonction d'onde.

33. La loi de Planck caractérisant le rayonnement thermique donne la densité spectrale d'énergie électromagnétique $\rho(\nu, T)$ d'un corps noir à la température T et pour une fréquence ν . Son expression est donnée par la relation suivante :

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$

c est la célérité de la lumière dans le vide, h la constante de Planck et k_B la constante de Boltzmann. Pour une température T donnée, la longueur d'onde pour laquelle le corps noir rayonne un maximum d'énergie est donnée par la loi $\lambda_{max} = \frac{A}{T}$ avec $A = 2.898 \mu m.K$.

- A. L'unité de $\rho(\nu, T)$ est le $J.m^{-3}.Hz^{-1}$.
- B. Si $T = 300K$, un corps noir émet majoritairement dans l'infrarouge.
- C. Un maximum d'émission dans l'ultraviolet correspond à une température $T = 6000K$.
- D. Toutes les sources thermiques de type corps noir sont effectivement de couleur noire.
- E. Cette loi n'est plus valide lorsque l'on s'intéresse à des corps dont la température est très basse (quelques Kelvins seulement).
34. On s'intéresse à la propagation de la lumière dans une fibre optique à saut d'indice. Comme représenté sur la figure ci-dessous, il s'agit d'un guide d'ondes optique cylindrique constitué de deux matériaux : le coeur d'indice de réfraction n_c et la gaine d'indice de réfraction n_g .

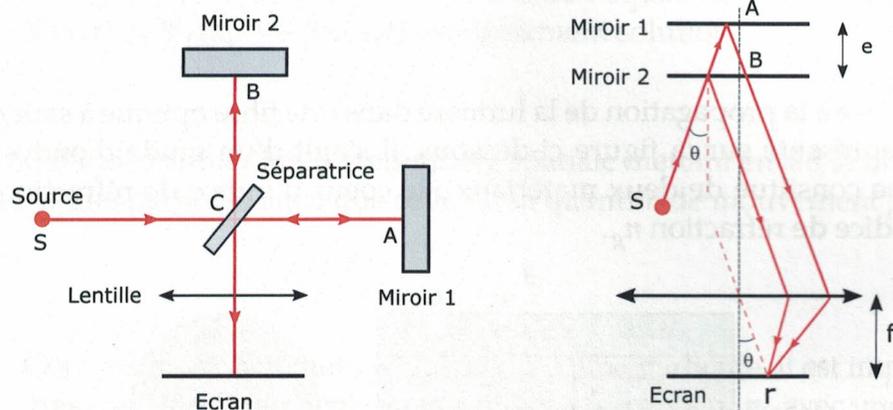


- A. Un signal optique sera guidé si l'indice de réfraction du coeur est supérieur à celui de la gaine.
- B. A l'interface air / coeur nous avons la relation $\sin \theta_1 = n_c \cos \theta_c$.
- C. La vitesse de l'onde se propageant dans le coeur est $v = c \times n_c$ (c étant la célérité de la lumière dans le vide).
- D. Le phénomène de réfraction totale interne à l'interface coeur / gaine permet de confiner la lumière dans le coeur de la fibre.
- E. Un rayon d'angle d'incidence θ_1 pourra être injecté dans la fibre si $\sin \theta_1 \leq \sqrt{n_c^2 - n_g^2}$.

35. Dans le cadre de l'optique géométrique :

- A. Quand on approche un objet d'une lentille convergente (en restant à une distance plus grande que la distance focale), l'image de l'objet s'éloigne de la lentille.
- B. L'image par une lentille convergente d'un objet situé avant le foyer objet se trouve entre la lentille et le foyer image.
- C. Le respect des conditions de Gauss permet d'obtenir un stigmatisme rigoureux.
- D. Le principe de Snell-Descartes stipule que le chemin optique suivi par un rayon lumineux est stationnaire et permet de calculer les angles des rayons réfléchis et réfractés.
- E. L'image d'un point situé à l'infini par une lentille convergente est un point localisé dans le plan focal image de la lentille.

36. On s'intéresse à un interféromètre de Michelson réglé pour observer des anneaux sur un écran. La figure ci-dessous représente le schéma de principe de l'interféromètre ainsi que son schéma équivalent :



L'intensité lumineuse au niveau de l'écran est de la forme $I(r) = I_0 [1 + \cos \varphi(r)]$ où $\varphi(r)$ est le déphasage au point r entre les deux faisceaux se superposant sur l'écran. On note λ la longueur d'onde de la source lumineuse supposée ici monochromatique.

- A. On parle de dispositif en lame d'air lorsque l'on observe des anneaux.
- B. La différence de marche entre les deux rayons est $\delta = 2e \sin \theta$.
- C. Le déphasage au point r est $\varphi(r) = 4\pi e \left(1 - \frac{r^2}{2f^2}\right)$.
- D. Nous avons une frange claire en $r = 0$ si $e = \lambda$.
- E. Il faut modifier l'angle de la séparatrice si l'on veut observer un système de franges parallèles et non plus des anneaux.

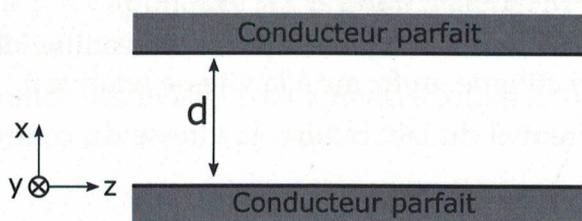
37. On s'intéresse à la diffraction d'une onde plane monochromatique de longueur d'onde λ par une fente de largeur a .

- A. Le principe d'Huygens-Fresnel stipule que chaque point de l'ouverture de la fente se comporte comme une source secondaire émettant une onde sphérique monochromatique de même longueur d'onde λ .
- B. Quelle que soit la distance entre la fente et l'écran, la figure de diffraction observée sur l'écran est une fonction sinus cardinal (on rappelle $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$).
- C. En champ lointain l'écart angulaire de la tache de diffraction est proportionnel à $\frac{\lambda}{a}$.
- D. La figure de diffraction ci-dessous correspond à celle d'une fente horizontale.



- E. L'ombre géométrique mise à part, un cheveu de même largeur a présentera la même figure de diffraction que la fente.

38. On s'intéresse à la propagation d'une onde électromagnétique entre deux plaques parfaitement conductrices, parallèles, espacées d'une distance d comme illustré sur le schéma ci-dessous :



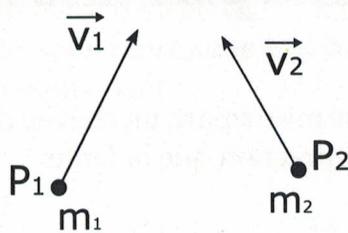
Dans le vide et loin de toute source de charge ou de courant, les équations de Maxwell pour les champs électrique $\vec{E}(\vec{r}, t)$ et magnétique $\vec{B}(\vec{r}, t)$ s'écrivent :

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{E}(\vec{r}, t) &= 0 & \text{div} \vec{B}(\vec{r}, t) &= 0 \\ \text{rot} \vec{E}(\vec{r}, t) &= -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} & \text{rot} \vec{B}(\vec{r}, t) &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \end{aligned}$$

On considère l'onde électromagnétique suivante $\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{d}\right) \cos(\omega t - kz) \vec{u}_y$ solution de l'équation de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide entre les deux plaques.

- A. Il s'agit d'une onde plane se propageant dans la direction z .
- B. Le champ électrique $\vec{E}(\vec{r}, t)$ est polarisé selon l'axe Oy .
- C. Le champ électrique $\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 \cos\left(\frac{\pi x}{d}\right) \cos(\omega t - kz) \vec{u}_y$ est également solution de l'équation de propagation entre les deux plaques.
- D. Le champ magnétique associé à cette onde électromagnétique s'écrit $\vec{B}(\vec{r}, t) = -\frac{E_0}{\omega} \left[k \sin\left(\frac{\pi x}{d}\right) \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x + \frac{\pi}{d} \cos\left(\frac{\pi x}{d}\right) \sin(\omega t - kz) \vec{u}_z \right]$.
- E. Le vide étant le milieu de propagation entre les deux plaques, toutes les fréquences peuvent se propager.

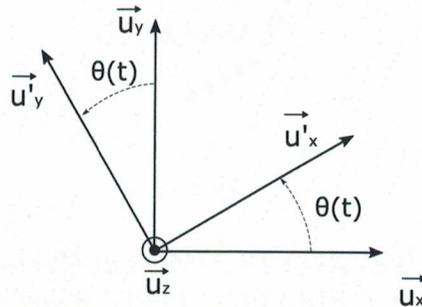
39. Dans le référentiel du laboratoire noté \mathcal{R} et d'origine O , on considère deux points matériels P_1 et P_2 de masses respectives m_1 et m_2 . Toujours dans \mathcal{R} , les positions de ces deux points sont $\vec{r}_1 = \vec{OP}_1$ et $\vec{r}_2 = \vec{OP}_2$ et leurs vitesses \vec{v}_1 et \vec{v}_2 . Cette situation est représentée sur la figure ci-dessous :



La masse réduite de ce système de deux points matériels est notée $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ et leur vitesse relative est notée $\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$. Le centre d'inertie du système est noté G et le référentiel barycentrique d'origine G est noté \mathcal{R}^* .

- A. Dans \mathcal{R} , le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* est animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme à la vitesse relative \vec{v} .
- B. Dans le référentiel du laboratoire, la vitesse du centre d'inertie est $\vec{v}_G = \mu \left(\frac{\vec{v}_1}{m_2} + \frac{\vec{v}_2}{m_1} \right)$.
- C. Dans le référentiel du laboratoire, la position du centre d'inertie est $\vec{OG} = m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2$.
- D. Dans le référentiel barycentrique, les vitesses des deux points matériels sont $\vec{v}_1^* = -\frac{\mu}{m_1} \vec{v}$ et $\vec{v}_2^* = \frac{\mu}{m_2} \vec{v}$.
- E. La quantité de mouvement totale du système de deux particules n'est pas nulle dans le référentiel barycentrique.

40. On considère deux référentiels $\mathcal{R}(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ et $\mathcal{R}'(O', \vec{u}'_x, \vec{u}'_y, \vec{u}'_z)$. \mathcal{R} est un référentiel Galiléen et \mathcal{R}' est en mouvement de rotation uniforme autour de l'axe \vec{u}_z de \mathcal{R} tel que : O' est confondu avec O , $\vec{u}'_z = \vec{u}_z$ et $\vec{\Omega} = \frac{d\theta(t)}{dt} \vec{u}_z = \Omega \vec{u}_z$.



Les deux référentiels sont représentés sur la figure ci-dessus et nous allons nous intéresser à décrire le mouvement d'un point matériel M de masse m dans ces deux référentiels. On rappelle les lois de composition des vitesses et des accélérations dans ce cas :

- $\vec{v}(M) = \vec{v}'(M) + \vec{v}_e$ (\vec{v}_e vitesse d'entraînement)
 - $\vec{a}(M) = \vec{a}'(M) + \vec{a}_e + \vec{a}_C$ (\vec{a}_e accélération d'entraînement et \vec{a}_C accélération de Coriolis)
- A. Etant en mouvement de rotation uniforme par rapport à \mathcal{R} , le référentiel \mathcal{R}' est également Galiléen.
 - B. L'accélération de Coriolis $\vec{a}_C = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega} \wedge \vec{OM}$ est un terme trop faible pour pouvoir être observé expérimentalement.
 - C. La vitesse d'entraînement \vec{v}_e est égale à $\vec{\Omega} \wedge \vec{OM}$.
 - D. Si la seule force appliquée sur le point matériel M est son poids \vec{P} , dans le référentiel \mathcal{R}' la seconde loi de Newton s'écrit $m\vec{a}'(M) = \vec{P}$.
 - E. Les quantités $m\vec{a}_e$ et $m\vec{a}_C$ sont appelées forces d'inertie.

FIN de l'ÉPREUVE de PHYSIQUE

